Fluiddynamik II

You Wu - youwuyou@ethz.ch. Version: 07/2024

Achtung: Diese Zusammenfassung wurde nicht in der Prüfung benutzt, da nur das Skript für Fluiddynamik II erlaubt war. Ich habe sie nur verfasst, um mir einige Sachen zu merken. Weder die Korrektheit noch die Vollständigkeit der Zusammenfassung sind garantiert.

1. MC Aufgaben - Fakten

1.1. MC - Turbulenz

- Vorraussetzung für Turbulenz und Grenzschicht

$$\text{rot } \boldsymbol{u} \neq 0$$

1.1.1. Kompressible Grenzschichten

- Kompressible Grenzschichten sind nicht unbedingt turbulent
- Der Druck ist senkrecht zur Strömungsrichtung konstant

<u>Eigenschaften</u>

- nicht isentrop durch Reibungsverluste
- Druck konstant über die Grenzschicht ($\frac{\partial P}{\partial y} = 0, p = p(x)$)
- Temperaturabhängigkeit der Viskosität $\mu(T)$

1.2. MC - Potentialströmung

Ausserhalb von Singularitäten:

$$\Delta\Phi = \text{div}(\nabla\Phi) = \text{div }(\boldsymbol{u}) \overset{!}{=} 0$$

$$\text{rot}(\boldsymbol{u}) = 0$$

Wirbelstärkefeld $\underline{\omega}(\underline{x})$	Geschwindigkeitsfeld $\underline{u}(\underline{x})$
$\text{div}\,\underline{\omega} \equiv 0$ (gilt immer!)	$\text{div}\,\underline{u} = 0$ (falls inkompressibel)
Galilei-invariant	**nicht** Galilei-invariant
Wirbellinien = Integralkurven von $\underline{\omega}$	Stromlinien = Integralkurven von $\underline{u}$
Wirbelröhre: Mantel besteht aus Wirbellinien	Stromröhre: Mantel besteht aus Stromlinien
Wirbelfaden (parallel zu Wirbellinien)	Stromfaden (parallel zu Stromlinien)
Zirkulation $\Gamma = \int_S \underline{\omega} \cdot \underline{n}\, \mathrm{d}S$ = Wirbelfluss durch S	Volumenstrom $\dot{V} = \int_S \underline{u} \cdot \underline{n}\, \mathrm{d}S$ durch S

Tabelle 10.1: Analogien und Unterschiede zwischen Wirbelstärkefeld und Geschwindigkeitsfeld

1.3. MC - Elementarströmungen

- Quelle/Senke:
  - ausserhalb der Singularität ist die Strömung quellenfrei $\text{div}(\boldsymbol{u}) = 0$
- Wirbel + Zylinderumströmung:
  - erzeugt keine Wirbelstärke in der Umströmung ausserhalb des Zylinders $\boldsymbol{\omega} = \text{rot}(\boldsymbol{\nabla\Phi}) = 0$
- Keilströmung
  - Folgende Strömungen sind Spezialfall von der Keilströmung
    1. Die Umströmung der Kante einer dünnen Platte
    2. Die Parallelströmung
  - Achtung! Folgende sind nicht
    1. Quadrupol
    2. Die Quelle

1.4. MC - Inkompressible Potentialströmung Bedingung

- Kontinuität $\text{div}(\boldsymbol{u}) = 0$
- $\rho = \text{const}$
- $\boldsymbol{u} = \text{grad } \Phi$
- $\text{rot } \boldsymbol{u} = 0$

<u>Achtung: nicht hinreichende Bedingungen 💀</u>

- $\boldsymbol{u} = \text{rot } \boldsymbol{\Psi}$
- $\text{rot}(\text{grad } P) = \boldsymbol{0}$

1.4.1. Körperkontour

- gilt $\boldsymbol{u}_{\text{Wand}} = \boldsymbol{0}$

1.5. MC - d'Alembertsche Paradoxon

- In einer stationärer Potentialströmung erfährt ein umströmter Körper keinen Widerstand!
  - aber ∃ Reibung
- Achtung: für Potentialströmung für geradlinig beschleunigten Körper
  1. Der Körper erfährt eine Kraft parallel zur Bewegungsachse
  2. An der Oberfläche des Körpers gilt $\boldsymbol{u}|_{\text{Oberfläche}} = \boldsymbol{0}$

<u>Kutta'sche Abflussbedingung</u>

- In realer Strömung wird die Hinterkante des Profils nicht umströmt
  - Zirkulation Γ so eingestellt, sodass die Hinterkante eine Staulinie bildet und ein glatter Abfluss stattfindet

<u>Konforme Abbildung</u>

- Joukowski-Abbildung bildet den Punkt $k = 0$ auf den Punkt $\zeta = \infty$ ab

1.6. MC - Drehungsbehaftete Strömung

1.6.1. Analytisch beschreibbare Wirbel

<u>Starrkörperwirbel</u>

- Satz von Stokes kann angewendet werden ↔ keine Singularität in Definitionsbereich

<u>Potentialwirbel</u>

- Singularität im Ursprung
- erhält die Orientierung der Fluidelemente, während sie zirkulieren

<u>Rankine-Wirbel</u>

<u>Reale-Wirbel</u>

<u>Wirbellinien</u>

In ebenen Grenzschichten verlaufen sie parallel zur Wand und senkrecht zur Strömungsrichtung

1.6.2. Wirbeltransportsgleichung

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \boldsymbol{u}$$

- wenn in der Strömung Wirbel vorliegen, kann nicht im ganzen Feld $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{0}$ sein
- Jedoch wenn $\boldsymbol{\omega} \neq 0$, muss nicht unbedingt ein Wirbel vorliegen
- Es gilt auch $\text{rot } \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{0}$

<u>Richtung Linien</u>

- Wirbelfäden verlaufen parallel zu Wirbellinien
- Wirbellinien (müssen nicht) senkrecht zu $\boldsymbol{\omega}$ stehen

1.7. MC - Kompressible Strömungen

<u>Barotrope Strömung</u>

- trivial für inkompressible Strömung
- isotherme ($T = \text{const}$) bzw. isentrope ($s = \text{const}$) Strömung eines idealen Gases erfüllen auch
- Isochoren verlaufen parallel zu Isobaren (gilt nicht wenn baroklin!)

$$\rho = \rho(P)$$

- Äquivalente Definitionen

$$\begin{aligned}
& \quad \text{Die Strömung ist barotrop} \\
\longleftrightarrow \quad & \varrho = \varrho(p) \\
\longleftrightarrow \quad & \frac{1}{\varrho}\nabla p \quad \text{ist rotationsfrei, rot} \left(\frac{1}{\varrho}\nabla p\right) \equiv 0 \quad \left(\text{stets ist rot} \left(\frac{1}{\varrho}\nabla p\right) = -\frac{1}{\varrho^2}\,\nabla\varrho \times \nabla p\,\right) \\
\longleftrightarrow \quad & \nabla p \quad \text{ist parallel zu} \quad \nabla\varrho\,, \;\; \nabla\varrho \times \nabla p = 0 \\
\longleftrightarrow \quad & \frac{1}{\varrho}\nabla p \quad \text{ist Gradient einer „Druckfunktion“}\; P \;\text{mit}\; \nabla P = \frac{1}{\varrho}\nabla p.
\end{aligned}$$

- Allgemein erfüllt

$$dh = \frac{1}{\rho}dp$$

<u>Barokline Strömung</u>

- Isochoren $\rho =$ const verlaufen nicht parallel zu Isobaren → Schwerpunkt Verschiebung → Erzeugung von **baroklinem Drehmoment** (Wirbeltransportsgleichung)
  - jedoch für das Vorliegen eines baroklinen Drehmoments kann die Dichte konstant sein
  - Druckgradient muss nicht unbedingt geben
- $\frac{1}{\rho}\nabla p$ rotationsfrei für barotrope Strömung, aber nicht für barokline Strömung!
- Beispiele:
  - Konvektion in der Atmosphäre durch Sonneneinstrahlung

1.7.1. Mach-Zahl

- Schallgeschwindigkeit und Temperatur hängen nicht von Machzahl ab, bei gegebenem γ und R

1.7.2. Isentrope Strömung

- Beispiel: Prandtl-Meyer-Expansion
- Vorraussetzungen
  - Reibungsfreiheit
    - Achtung: Fanno-Strömung wegen Reibungsverluste nicht isentrop
  - keine Verdichtungsstösse

1.7.3. Verdichtungsstoss

- nicht baroklin!
- Enthalpie $h = c_p T$ bleibt nicht erhalten!
- Totale Enthalpie $h_0 = c_p T + \frac{u^2}{2}$ bleibt aber erhalten!

<u>Laval-Düse</u>

- die isentrope Strömung durch die Laval-Düse ist nicht baroklin!
- im divergenten Teil kann die Strömung
  - inkompressibel
  - Überschall
  - Unterschall
  - Stoss beinhalten

<u>Fanno-Strömung mit konstantem Querschnitt</u>

- adiabate Strömung
- kein Übergang vom Unterschall → Überschall
- totale Enthalpie $h_0 = c_p T + \frac{u^2}{2}$ bleibt erhalten!

<u>Mach'scher Winkel</u>

- beschreibt die Ausbreitung von Schallwellen
- vor dem schiefen Verdichtungsstoss geringer als dahinter, falls $\text{Ma}_2 > 1$

2. Potentialströmungen

$$e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y)$$

$$z = re^{i\theta}$$

Winkel

$$\theta = \arg(z) = \arctan 2(y, x)$$

- in Taschenrechner $\text{Pol}(x; y)$

Vector Identity

$$\begin{aligned}(A \cdot \nabla)A &= \frac{1}{2}\nabla|A|^2 - A \times (\nabla \times A) \\ &= \frac{1}{2}\nabla|A|^2 + (\nabla \times A) \times A\end{aligned}$$

2.1. Grundbegriffe (Φ, Ψ, u)

Rezept: Berechnung vom Potential Φ durch u_r, u_θ

1. $u_r \stackrel{!}{=} \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}$ und $u_\theta \stackrel{!}{=} -\frac{\partial \Psi}{\partial r}$ ergibt zwei Gleichungen
   - Integrieren eins davon und lass das Konstante abhängig von der anderen Variable sein
2. Das Ergebnis von der Integration wieder nach der anderen Variable ableiten um auf das Konstante zu bekommen

Beispiel: alte Prüfungssammlung (2019) 1.b)

2.2. Quellenstärke & Zirkulation

<u>Quellenstärke</u>

- Satz von Gauss wenn keine Singularität umgeschlossen wird

$$Q_c \stackrel{\text{Gauss}}{=} \int_S \text{div}(\boldsymbol{u}) dS$$

<u>Zirkulation</u>

- Satz von Stokes wenn keine Singularität umgeschlossen wird

$$\Gamma_c \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_S (\text{rot } \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{n} dS$$

Achtung! Nutze BC um unnötige Integrale zu eliminieren! $\oint_c u dx$ für $u = 0$ an der Wand

2.3. Elementarströmung

- $z = x + iy$ in $F(z)$ muss zerlegt werden, bevor man mit Erkennung von Φ oder Ψ fortfährt!

Rezept: Elementarströmung erkennen

- Komplexe Potential $F(z) = \Phi + i\Psi$ mit Ψ gegeben
  - e.g. $\Psi(r, \theta) = \frac{k \cdot \cos(\theta)}{r} + lr^2 \sin(2\theta)$
- Wichtig: Keilströmung ist nicht in der Tabelle

1. Vergleich $F(z)$ mit allen Elementarströmungen
   - Parallel $(z, x, y$ sklaliert, kein r Term vorhanden)
   - Quelle/Senke (?)
   - Potentialwirbel (?)
   - Dipol (hilfreich mit $x = r\cos\theta$ und $y = r\sin\theta$)
   - Keilströmung (gleiche Potenz in r^n und $\cos(n\theta)$ bzw. $\sin(n\theta)$)

Typ 1: Direkte Erkennung

- In dem Beispiel kann man Keilströmung direkt erkennen → gib an
  - $C = ..., n = ..$

Typ 2: Transformierte Elementarströmung

- man erkennt teilweise das Muster von einer Elementarströmung aber es match nicht 100%; Drehung/andere Transformation findet statt durch

$$F_d(z) = F(e^{-i\alpha} \cdot z) \to F(e^{-i\alpha} \cdot re^{i\theta}) = F(re^{i(\theta - \alpha)})$$

  - somit muss man $\theta \to \theta - \alpha$ in den Formeln vom Skript setzen, und dann schauen wie man auf unsere Ψ kommt

Beispiel: alte Prüfungssammlung (2019) 1.d)

2.4. Staupunkte & Stromlinie & Staustromlinie

2.4.1. Staupunkte

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_s) \stackrel{!}{=} 0$$

<u>Staupunkte gegeben</u>

- Wenn auf der Abbbildung die Staupunkte zu erkennen sind, kann man damit folgende Grössen ermitteln
  - Quellstärke (Quelle, Senke) in dem man $w(z_s) = 0$ umformen nach Q (alte Prüfung 2019 2.b)

Rezept: Staupunkte Suchen

- Staupunktbeziehung in 2D ergibt zwei Gleichungen

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_s) \stackrel{!}{=} 0$$

1. Winkelbeziehung $\theta \in \{...\}$ finden in dem
   - Fall 1: Terme wie $\cos(\theta)$, $\sin(\theta)$ zusammengefasst werden
   - Fall 2: Falls eine Gleichung sowohl θ als auch r in sich hat, mit der anderen Gleichung durch gemeinsamen Term sowie r_s oder r_s^3 etc. gleichsetzen und auf die Winkelbeziehung zu bekommen
2. Winkelbeziehung in der anderen Gleichung einsetzen, da beide Gleichungen gleichzeitig null sein müssen um Staupunktbedingung zu erfüllen

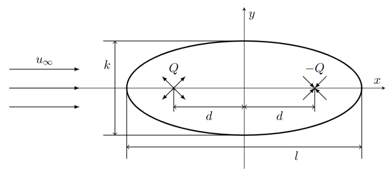
Achtung! Dieser Vorgang wiederholt sich zwei mal

Beispiel: alte Prüfungssammlung (2019) 1.c)

2.4.2. Staustromlinie

$$\Psi(x, y) = \Psi(\boldsymbol{x}_s)$$

- beschreibt die Kontour eines umströmten Körpers
- Find contour of the wall ⇒ calculate streamline $\Psi = \text{const}$



Rezept: Bestimmte Länge bestimmen

- e.g. bestimme Breite k (durch Punktenbeziehung beschreibbar)

1. Punkt auf der Staustromlinie suchen, der mit der gesuchten Grösse k beschrieben werden kann, hier $p = \left(0, \frac{k}{2}\right)$ gefunden
2. Bekannte Staupunkte sind $p_{s,1} = \left(\frac{l}{2}, 0\right)$, $p_{s,1} = \left(-\frac{l}{2}, 0\right)$
3. Gleichung aufstellen und nach gesuchter Grösse lösen

$$\Psi\left(\frac{l}{2}, 0\right) \stackrel{!}{=} \Psi\left(0, \frac{k}{2}\right)$$

Beispiel: alte Prüfungssammlung (2019) 1.c)

2.5. Volumenstrom durch Potentialfunktion

$$\frac{\dot{V}_{21}}{b} = \Psi_2 - \Psi_1$$

- wenn die Formel von der Stromfunktion vorhanden ist, kann man unter gegebener Breite den Volumenstrom berechnen (TODO: check Einheit)

Beispiel: alte Prüfungssammlung (2019) 1.d)

2.6. Kraftberechnung

- no F_x due to d'Alembertsche Paradox

$$F_x = 0$$

$$F_y = -\Gamma \cdot u_\infty \cdot b$$

- wenn keine Singularität vorhanden ist, Zirkulation gleich null $(\Gamma = 0)$
  - auch wenn eine Quelle und eine Senke gleicher Stärke vorhanden sind und sich aufheben

Integrals for integrating forces $dF = bPdx$

$$\int \sin^3(x) dx = \frac{1}{3}\cos^3(x) - \cos(x)$$

3. Drehungbehaftete Strömungen

<u>Induzierte Geschwindigkeit</u>

Case 1: als Superposition von mehreren Wirbeln

- wenn Wirbel 1 um $P = (x_p, y_p)$ befindet
  - e.g. Wirbel 1 & 2 mit der Wand (virtuelle Wirbeln 1^* und 2^*), dann für Wirbel 1 zählt man $(2, 1^*, 2^*)$

$$\boldsymbol{u}(x_p, y_p) = \sum_{\text{Wirbeln}} \boldsymbol{u}_{\text{ind, wirbel}}$$

<u>Modellieren mit Wand</u>

- Man muss virtuelle Wirbel spiegelverkehrt sezten

<u>Stromlinie bestimmen</u>

- wähle festen Wert Ψ_0 als Parameter einer Stromlinie
  - bestimme Verlauf aus $\Psi(x, y) = \Psi_0$ $\left(\Psi(x, y) = -\frac{my}{x^2+y^2} \stackrel{!}{=} \Psi_0\right)$

<u>Konforme Abbildung</u>

<u>Instationäre Potentialströmung</u>

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + \frac{P}{\rho} = C(t)$$

Virtuelle Masse

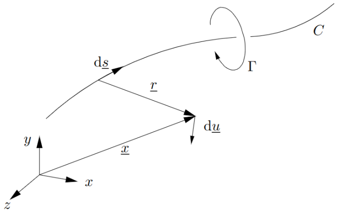
$$\boldsymbol{F} = m^\star \boldsymbol{a} = m^\star \frac{d\boldsymbol{u}(t)}{dt}$$

Wirbeltransportsgleichung

$$\underbrace{\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t}}_{\text{stationär}} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{w} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} + \underbrace{\nu\Delta\boldsymbol{w}}_{\text{reibungsfrei}}$$

3.1. Biot-Savart Gesetz

$$\boxed{\underline{u}(\underline{x}) = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_C \frac{\mathrm{d}\underline{s}\times\underline{r}}{|\underline{r}|^3}\ .}$$



- Achtung! Wenn man hiermit die $\boldsymbol{du}$ Richtung finden will, muss man sicher stellen, dass sowohl $\boldsymbol{ds}, \boldsymbol{r}$ als auch die Zirkulation in **derselben** Richtung gehen wie hier auf dem Bild. Sonst Fehler!
  - vielleicht zeichnen hilft
  - und umblättern & vergleichen

3.1.1. Biot-Savart für halb-endliche & endliche Wirbelfäden

$$|u_\theta| = \frac{\Gamma}{4\pi r}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

- Achtung! Hier wird nur der absolute Betrag berechnet, Einheitsvektor für Richtung von $\boldsymbol{u}_\theta$ muss zusätzlich hinzugefügt werden!

3.1.2. Spezialvektoren auf dem Ring

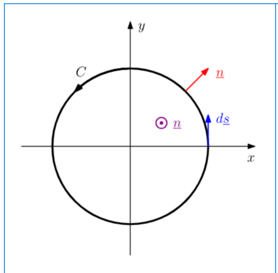
Gauss

$$Q_c = \oint_c \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}ds$$

Stokes

$$\Gamma_c = \oint_c \boldsymbol{u}d\boldsymbol{s}$$

2D



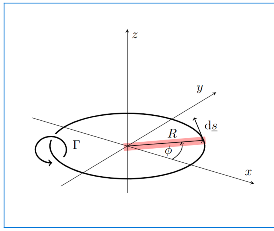
$$\boldsymbol{dn} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$ds = rd\theta$$

$$\boldsymbol{ds} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}rd\theta$$

3D

- Achtung! $\boldsymbol{R}$ hier ist nicht $\boldsymbol{r}$ und kann nicht in Biot-Savart direkt eingesetzt werden!
  - somit muss $\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{R}$ gelten



$$\boldsymbol{ds} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}rd\theta \overset{r=R}{=} \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}Rd\theta$$

4. Kompressible Strömungen

Unit Conversion

- 1 bar $= 1\cdot 10^5$ Pa
- 1 m/s $= 3.6$ km/h

4.1. Isentrope Strömung

Invariante Ruhegrössen anhand von Beispielen:

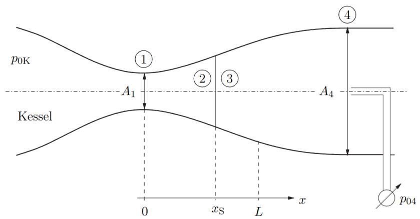
- Ruhedruck p_0

Vor dem Stoss (isentrop):

$$p_{0\mathrm{K}} = p_{01} = p_{02}$$

Nach dem Stoss (isentrop):

$$p_{04} = p_{03}$$



4.2. Senkrechter Verdichtungsstoss

4.3. Strömung bei veränderlichem Querschnitt

Rezept: Laval-Düse

- Schallgeschwindigkeit wird nur am engsten Querschnitt P erreicht! Jedoch muss es nicht unbedingt geschehen!
  - Nutze $\mathrm{Ma}_* = 1$
  - $A(x = P) \overset{!}{=} A_*$ soll hilfreich sein!

4.4. Schiefer Verdichtungsstoss

Rezept: Stossdiagram Lesen

$$\mathrm{Ma} \sim \theta \sim \beta$$

- Wichtig! Zuerst auf der Abbildung die Winkeln herraus finden
- Wenn man zwei von den vorhandenen Variablen hat, kann man das Dritte bestimmen
  - oft als "Hidden Relation"

Achtung! Das Rezept oben kann direkt verwendet werden in folgender Situation:

- hier Ma_1 und θ_1 bekannt, gesucht ist Ma_2
  - Bestimme zuerst β_1 durch Stossdiagram
  - Wert erhalten durch $\mathrm{Ma}_{n1} \overset{\text{Tabelle}}{\to} \mathrm{Ma}_{n2} \overset{\text{Winkel}}{\to} \mathrm{Ma}_2$